

УДК 517.572

УСЛОВИЯ p -ЛИСТНОСТИ ТИПА АВХАДИЕВА–БЕККЕРА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА

Р.Г. Насибуллин¹, И.К. Шафигуллин²

¹ masibul@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

² ilnar.shafigullin@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

Получены достаточные условия p -листности типа Авхадиева–Беккера для гармонических отображений круга.

Ключевые слова: гармоническое отображение, условие однолистности Беккера, условие многолистности.

Пусть h и g — голоморфные функции в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Рассмотрим гармоническое отображение вида

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \quad z \in D.$$

В теории функций комплексного переменного большое значение имеет исследование однолистности функций. В этом смысле основополагающее значение имеет результат Й. Беккера (см. напр., [1]–[3]).

Теорема 1. Пусть $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция, удовлетворяющая условию $h'(z) \neq 0$. Если для всех $z \in D$ имеет место неравенство

$$(1 - |z|^2)|zh''(z)/h'(z)| \leq 1,$$

то функция h однолистка в D .

В [4] получено следующее обобщение указанного результата на случай гармонических отображений:

Теорема 2. Пусть функции h и g являются голоморфными в единичном круге D и удовлетворяют условиям $h'(z) \neq 0$ и $|\omega(z)| < 1$ в любой точке $z \in D$, где $\omega(z) := g'(z)/h'(z)$. Если выполняется неравенство

$$|\omega(z)| + (1 - |z|^2) \left| z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| \leq 1 \quad \forall z \in D,$$

то отображение $f = h + \overline{g}$ является однолистным в D .

Широкий интерес представляют не только достаточные условия однолистности, но и достаточные условия p -листности, где p — натуральное число. Будем говорить, что функция f является p -листной в некоторой области, если

- а) для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = w$ имеет не более чем p корней,
- б) существует $w_0 \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $f(z) = w_0$ имеет в точности p корней с учетом их кратности.

Для аналитических функций Ф.Г. Авхадиевым [5] получена

Теорема 3. Пусть h аналитична при $0 < |z| < 1$, n — целое число, $n \neq 0$, и

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-n} h(z) = a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Функция h будет $|n|$ -листной в D , если

$$\sup_{z \in D} \left| (1 - |z|^{2n}) \left(n - 1 - z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right) \right| \leq |n|, \quad |z| < 1.$$

В данной работе, следуя схеме доказательств из [6], [7], мы получили достаточные условия многолистности типа Авхадиева–Беккера для гармонических отображений круга.

Теорема 4. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, n — целое число, $n \neq 0$. Предположим, что h и g являются голоморфными в $D \setminus \{0\}$, $h'(z) \neq 0$ и $|\omega(z)| < 1$ для любого $z \in D \setminus \{0\}$, где $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$, кроме того, h удовлетворяет условию

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-n} h(z) = 1.$$

Тогда гармоническая функция $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ будет $|n|$ -листной в D , если

$$|n| |\omega(z)| + \left| (1 - |z|^{2n}) \left(n - 1 - z \frac{h''(z)}{h'(z)} \right) \right| \leq |n|, \quad |z| < 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351-а), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-41-02433.

Литература

1. Becker J. Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Functionen // J. Reine Angew. Math. – 1972. – V. 255. – P. 23–43.
2. Becker J. Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien // Math. Ann. – 1973. – V. 202. – P. 321–335.
3. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. – 1975. – Т. 4, № 30. – С. 3–60.
4. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. Условия однолистности типа Беккера для гармонических отображений // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 11. – С. 1–6.
5. Авхадиев Ф.Г. Функционал Минковского по областям значений логарифма производной и условия однолистности // Тр. семин. по краев. задачам. – 1992. – № 27. – С. 3–21.
6. Авхадиев Ф.Г. Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений // Матем. заметки. – 1975. – № 18 (6). – С. 793–802.
7. Авхадиев Ф.Г. Допустимые функционалы в условиях однолистности для дифференцируемых отображений n -мерных областей // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 4. – С. 3–12.

AVKHADIEV–BECKER TYPE p -VALENT CONDITIONS FOR HARMONIC MAPPINGS OF A DISC

R.G. Nasibullin, I.K. Shafigullin

We obtain Avkhadiev–Becker type p -valence conditions for locally univalent harmonic mappings defined in the unit disc.

Keywords: harmonic mapping, Becker univalence condition, multivalence condition.